

Wie Ellipse, Hyperbel und Parabel zu ihrem Namen kamen und  
einige allgemeine Bemerkungen zum Thema "Kegelschnitte" im  
Unterricht

Hans-Christian Reichel, Universität Wien

- § 1. Einleitung (Kegelschnitte im Mathematikunterricht (MU) - ein kurzer Überblick)
- § 2. Historisches über Kegelschnitte; Namensgebung
- § 3. Eine Bemerkung über Koordinaten und Koordinatensysteme - Ursprung und kulturhistorische Auswirkungen

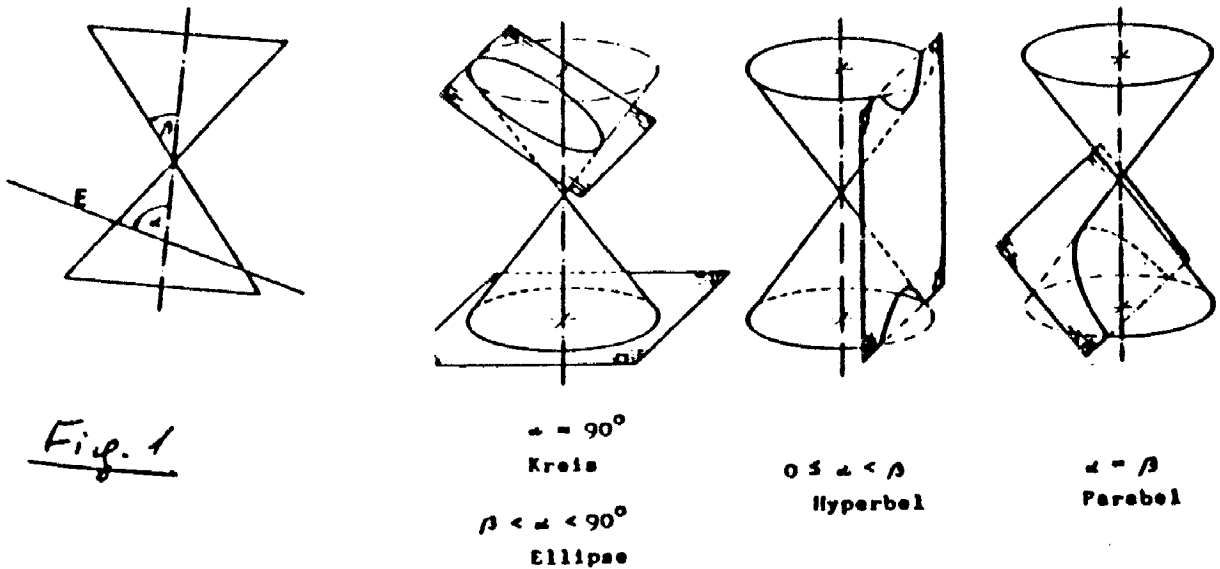
§ 1. Einleitung (Kegelschnitte im MU - ein kurzer Überblick):

Die Kegelschnitte (Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel und ausgeartete Formen wie z.B. kreuzende Gerade u.a.) gehören in vielfacher Hinsicht zu den interessantesten Objekten der klassischen Mathematik. Und es ist traurig, daß sie als eigenständige Studienobjekte im MU u.a. durch Lehrplanänderungen offenbar mehr oder minder zurückgedrängt werden und wurden.

Kegelschnitte treten im MU unter den verschiedensten jeweils in sich "geschlossenen" Gesichtspunkten in Erscheinung, die einerseits jeder für sich von Bedeutung sind, und wo andererseits gerade in den Querverbindungen und Wechselwirkungen besonders reizvolle Themen liegen:

(I) In der räumlichen Geometrie

treten sie als die Schnittkurven zwischen Ebenen (in allen denkbaren Lagen) und einem (beliebig gegebenen, sich ins Unendliche erstreckenden Doppelkegel (Rotationskegel) auf.



Aus dieser Sicht wird z.B. deutlich,

- (1) Wie Kegelschnitte etwa als Schattenlinien einer Kreislinie bei punktförmiger Beleuchtung auftreten können, vor allem aber
- (2) wie je zwei Kegelschnitte (durch eine sogenannte projektive Transformation) ineinander übergeführt werden können. Dadurch entsteht eine "einheitliche Behandlung" aller Kegelschnitt-Typen. (Weiter unten werden wir eine weitere einheitliche, aber planimetrische Betrachtungsweise kennenlernen, die ebenfalls bereits aus der Antike kommt.

Die Sichtweise der räumlichen Geometrie erlaubt es, eine Fülle von Kegelschnitt-Eigenschaften bequem herzuleiten, bzw. besser zu verstehen. (Stichworte etwa: Dandelinsche Kugeln, Veranschaulichung projektiver Eigenschaften, "Fernpunkte" von Kegelschnitten u.a.m.)

(II) In der ebenen Geometrie

können die Kegelschnitte als Kurven mit jeweils ganz bestimmten Eigenschaften (Besonderheiten) definiert und (vergleichend) behandelt werden. Etwa als Ortslinien, wie sie sowohl zur Definition als auch zur punktweisen Konstruktion herangezogen werden können. - Zur Erinnerung:

Ellipse bzw. Hyperbel: Menge aller Punkte P, wo die Summe (Differenz) der Entfernungen  $d(P, F_1)$  und  $d(P, F_2)$  zu zwei festen Punkten  $F_1, F_2$  (den "Brennpunkten") konstant ( $=2a$ ) ist.

Parabel: Menge aller Punkte P, deren Entfernung zu einem festen Punkt F, dem "Brennpunkt" gleich der zu einer festen Linie l, der "Leitlinie" ist. Aus diesen und anderen planimetrischen Eigenschaften, die sich z.B. auf "Leitkreise", "Leitlinien", Tangenten, gewisse kinetisch-mechanische Gesichtspunkte u.a. beziehen, ergeben sich dann ja auch einige "Anwendungen", wie sie früher in der Unterstufe mehr oder minder ausführlich behandelt wurden. (Beispielsweise Fig. 2a,b)

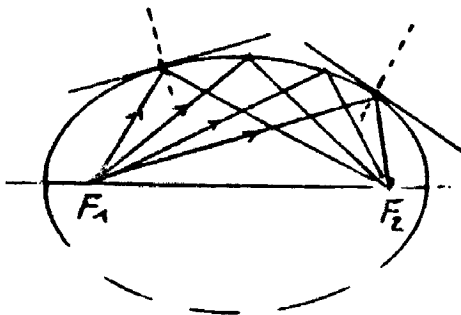


Fig. 2a: "Flüstergewölbe"

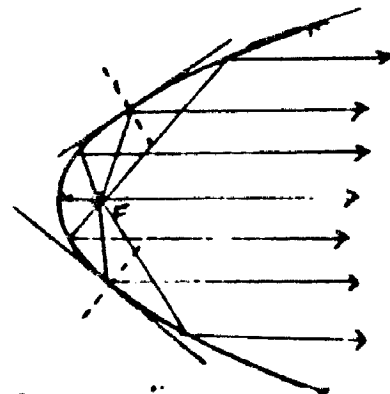


Fig. 2.b  
Parabol. Scheinwerfer,  
(Hohlspiegel, etc.)

Hier spielt dann auch der geometrisch konstruktive (und wohl auch anschaulich "wohlgefällende") Aspekt die wesentliche Rolle, dem ich z.B. auch aus didaktischer Sicht großen Wert beimesse, der aber mehr und mehr vernachlässigt zu werden scheint. (Stichworte z.B. "Produktives Arbeiten", "Genauigkeit", "Ausdauer", "Freude", ästhetische Gesichtspunkte, alles Lehrziele, die gerade auch

vom neuen Lehrplan angesprochen werden!)

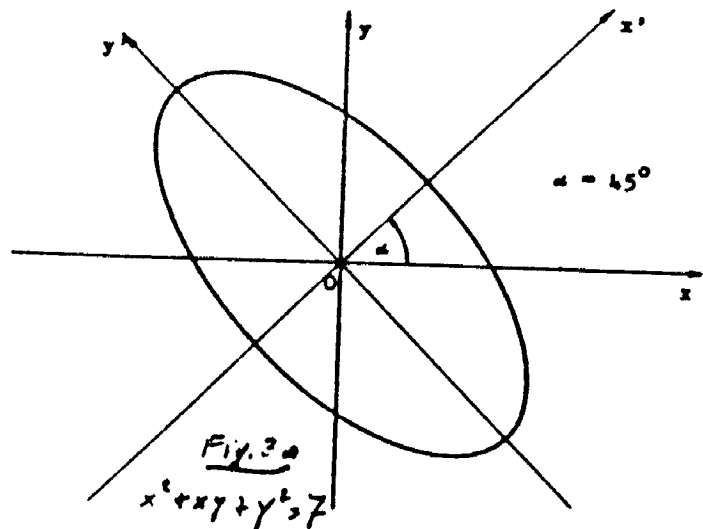
(III) Die Kegelschnitte als einfachste Beispiele der nichtlinearen analytischen Geometrie:

"Überraschenderweise" treten nämlich die Kegelschnitte in der  $x$ - $y$ -Ebene genau als Nullstellenmengen der Polynome 2. Grades  $p(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$  auf. M.a.W.: als Schaubilder der durch  $p(x,y) = 0$  (implizit) definierten Funktionen  $y = f(x)$ . Daß sich

tatsächlich alle Kegelschnitte in dieser Weise "ergeben", folgt z.B. aus der analytischen Behandlung der Geometrie der projektiven Ebene. 1)

Mit diesem Aspekt der Kegelschnitte sind wir in der Oberstufe konfrontiert, aber auch

bereits in der Unterstufe, wo z.B. das bekannte Hyperbelschaubild der indirekten Proportionalität  $y = \frac{1}{x}$  auftritt, oder die Graphen einfacher quadratischer Funktionen  $y = ax^2 + bx + c$  (Parabeln) besprochen werden).



1) Schreibt man nämlich  $p(x,y) = 0$  in homogenen Koordinaten

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  mit  $x \hat{=} \frac{\bar{x}}{\bar{z}}$ ,  $y \hat{=} \frac{\bar{y}}{\bar{z}}$ ,  $\bar{z} \neq 0$ , so ergibt sich - wenn man  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

als räumliche Koordinaten auffaßt - die Gleichung eines Doppelkegels im Raum mit Spitze in  $(0,0,0)$ . Die Nullstellenmenge von  $p(x,y)$  erscheint dann als Schnittlinie des Doppelkegels mit der Ebene  $\bar{z} = 1$ . (Präziser gesagt, handelt es sich um ein räumliches Modell der projektiven Ebene, wo "Punkte" als Gerade des Raumes durch den Nullpunkt erscheinen und umgekehrt. Vgl. Lehrbücher über Lineare Algebra und analytische Geometrie!)

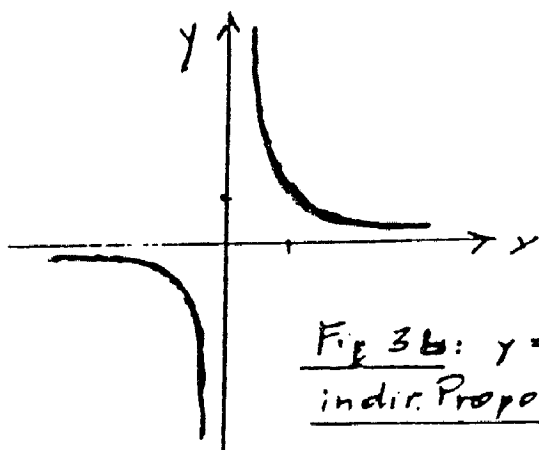


Fig. 3b:  $y = \frac{1}{x}$   
indir. Proport.

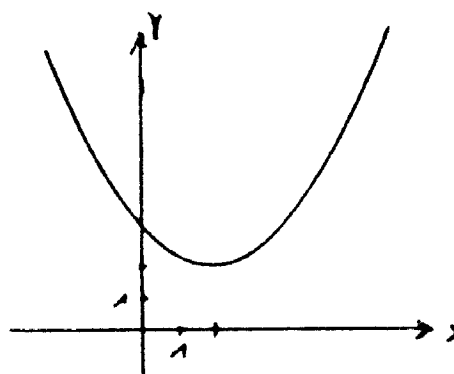


Fig. 3c:  $y = (x-a)^2 + b$   
allgemein:  $y = ax^2 + bx + c$

Für die "Koordinatenmethode" der analytischen Geometrie haben die Kegelschnitte nicht nur eine didaktisch-methodische, sondern auch eine immens kulturgeschichtliche Bedeutung (siehe §31). Die Tragweite und Bedeutung der Koordinaten-Methode und der daraus resultierenden philosophischen Entwicklung (siehe §3) kann nämlich meines Erachtens erst dann "richtig" verstanden werden, wenn sich diese "Algebraisierung der Geometrie" auch bei nicht-linearen Kurven und Gleichungen bewährt; und für den Mathematikunterricht kommen hier eben vor allem die Kegelschnitte in Frage. (Vgl. z.B. [SCH]).

Tatsächlich hat ja René Descartes seine so grundsätzliche "Koordinatenmethode" an Kegelschnittproblemen entwickelt und erstmalig erprobt. ([DE]). In §3 werden wir etwas ausführlicher auf die damit verbundenen allgemeinbildenden Aspekte eingehen.

#### (IV) Kegelschnitte in der angewandten (praktischen) Mathematik

Beispiel: Parabeln in der numerischen Mathematik

Die Grundidee der numerischen Integration liegt darin, den Graphen einer auf einem Intervall  $[a, b]$  gegebenen Funktion durch die Graphen "einfacherer" Funktionen zu approximieren, nämlich durch solche, die sich auf  $[a, b]$  "leichter" integrieren lassen.

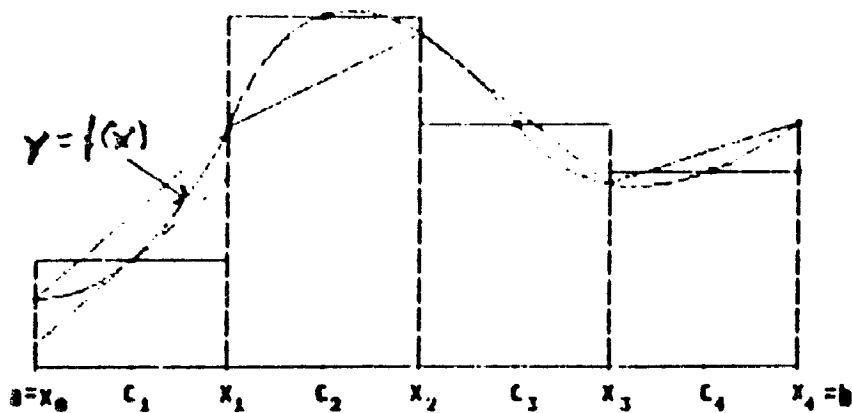


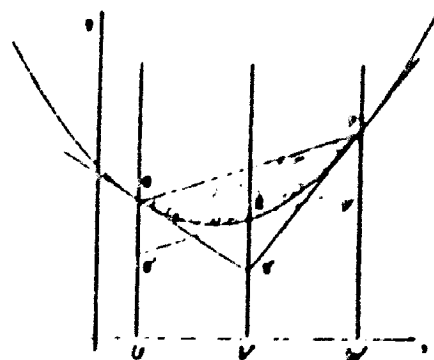
Fig. 4a

Die (auch für den Mathematikunterricht einfachsten Verfahren sind das Mittelpunktverfahren (Riemann-Summe mit Stützstellen jeweils in der Mitte der Teilintervalle) und das Trapezverfahren (stückweise Approximation von  $f$  durch Sehnen des Graphen von  $f$ ). Siehe Fig. 4a!

Wesentlich bessere Approximationen von  $\int_a^b f(x)dx$  erhält man, wenn man den Graphen von  $f$  stückweise durch Parabelstücke ersetzt. (Fig. 4a ist z.B. so angelegt, daß die ersten beiden Parabelstücke mit dem Graphen von  $f$  (sogar) übereinstimmen). Erst jüngst hat A.KIRSCH in einer - gerade auch für Lehrende - sehr interessanten Arbeit ([KI]) darauf hingewiesen, wie die jeweiligen Approximationsfehler durch elementargeometrische Kenntnisse über Parabeln einfach abgeschätzt werden können, bzw. wie die erwähnten Näherungsverfahren miteinander verglichen werden können. Methodisch-didaktisch eröffnen sich für den Mathematikunterricht äußerst zweckmäßige heuristische Verfahren, die sicherlich ein besseres Verständnis der numerischen Integration bewirken als der mehr oder minder unreflektierte "Gebrauch" bekannter Fehlerformeln. Als Beispiel sei etwa die bereits Archimedes bekannte Tatsache genannt, daß - siehe Fig. 4b - die Tangente in  $R$  ( $\overline{UV} = \overline{VW}$ ) parallel zur Sehne  $OP$  ist, und daß die Fläche des Parabel-

segmentes genau zwei Drittel der Parallelogrammfläche [OPO'P'] ausmacht. Genaueres findet man z.B. in [KI]. Dort wird überzeugend dargelegt, daß "es auch vom Standpunkt der numerischen Mathematik nützlich ist, einige einfache geometrische Eigenschaften der Parabel

Fig. 4b



"im Kopf zu haben" - Eigenschaften, die dem Geometer seit Archimedes wohlbekannt sind und die in Geometrie-freundlicheren Zeiten wohl auch Schülern vermittelt wurden. Parabeln sind ja sozusagen die einfachsten "krummlinigen" Funktionsgraphen...".

(V) Als hier letztes Beispiel für das Auftreten von Kegelschnitten im Unterricht sei auf einige (auch historisch wichtige) Punkte in den Naturwissenschaften erinnert, z.B. an die Keplerschen Gesetze (J. KEPLER 1571-1630), die meines Brachtes durchaus zur sogenannten Allgemeinbildung gehören.

Dem ersten dieser Gesetze zufolge bewegen sich die Planeten auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Auch andere Himmelskörper und Satelliten bewegen sich längs gewisser Kegelschnittbahnen, und die Wurfparabeln sind allen Schülern aus dem Physikunterricht bekannt. (Der "Grund" für das Auftreten von Kegelschnitten liegt hier in den entsprechenden ("geometrifizierten") Bewegungsgleichungen der Newtonschen Mechnik).

Zusammenfassung: Die Thematisierung all dieser Gesichtspunkte, vor allem aber der Querverbindungen ist meines Brachtens sowohl fachlich-wissenschaftlich, wie unter didaktischen Aspekten für den Mathematikunterricht nicht nur ausreichend zu rechtfertigen, sondern auch zu fordern.

Im folgenden wollen wir den Ursprüngen der Kegelschnitte und der Bedeutung ihrer speziellen Namen ein wenig nachgehen.

## § 2. Historisches über Kegelschnitte; Namensgebung

Kegelschnitte wurden bereits in der Antike intensiv studiert und ihre Theorie zu einer großen Reife geführt.

Erstmalig treten sie bei MENAICHMOS (um 360 v. Ch.) auf, und zwar im Zusammenhang mit dem berühmten Delischen Problem: Aus einer gegebenen Würfelkante  $a$  soll die Kante  $x$  eines Würfels mit doppeltem Volumen "exakt" konstruiert werden, wobei nur Zirkel und Lineal verwendet werden dürfen. Dieses Problem hatte bei den griechischen Mathematikern eine große Bedeutung und wurde vielfach untersucht. Es war schließlich eine Quelle auch zahlreicher anderer Entdeckungen und reicht offenbar in mythische Zeit zurück, wo angeblich der sagenhafte kretische König Minos ein würfelförmiges Grabmal unter Beibehaltung seiner Gestalt zu einem doppelt so großen ausbauen lassen wollte. Auch der Name "Delisches" Problem weist (u.U.) auf mehr als bloß spielerisch-theoretisches Interesse hin.

Schon HIPPOKRATES VON CHIOS (um 430 v. Ch.) führte dieses Problem auf die Lösung der folgenden "fortlaufenden Proportion"  $a:x=x:y=y:2a$ , deren "mittlere Proportionale" es zu finden galt. <sup>2)</sup>

2) Diese Proportion ist ja gleichwertig mit  $a=x^2:y$  und  $y=2a^2:x$ , sodaß tatsächlich  $x^3=2a^3$  und  $x$  also die gesuchte Kante ist. Heute wissen wir, daß das Problem - wie auch z.B. das Problem der Kreisquadratur konstruktiv nicht mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann (Galoissche Theorie). Der tiefere Grund liegt darin, daß das zu  $\sqrt[3]{2}$  gehörige Minimalpolynom  $x^3-2=0$  einen nicht durch 2 teilbaren Grad hat. Schon in der Antike wurden allerdings Näherungslösungen gefunden, bzw. sehr elegante Lösungen mittels z.B. kinematisch-mechanischen Methoden, Schnitte von Kugeln, Zylindern und Kegeln miteinander u.s.w. (z.B. ARCHYTAS VON TARENT), die allerdings nicht als "exakt" galten und die zu größeren Diskussionen über das Wesen "wahrer" geometrischer Konstruktionen führten (PLATONische Einwände).



Es waren also - anders gesagt - die beiden Gleichungen  $x^2 = ay$  und  $xy = 2a^2$  zu lösen, was

(mit heutigen Worten) auf den Schnitt einer Parabel und einer Hyperbel führte. (Fig. 5)

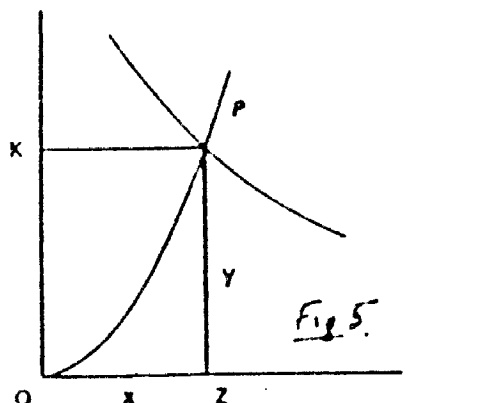
Aus diesem Grunde also wurde die Frage nach "exakten" Konstruktionen und Beschreibungen solcher Kegelschnitte virulent. Im Zuge derartiger Überlegungen erkannte dann

MENAICHMOS als erster, daß die hier involvierten Kurven auch als ebene Kegelschnitte auftreten.

Die Theorie dieser Kurven scheint sich rasch entwickelt zu haben, denn schon um 325 v. Ch. schrieb EUKLID bereits ein ganzes Buch (Rolle) über Kegelschnitte, das allerdings verloren ging.

Vor allem ARCHIMEDES (287-212 v.Ch.) beschäftigte sich vielfach mit Kegelschnitten (ohne noch ihre heutigen Namen zu verwenden). Bekannt sind seine Kreisberechnungen, Volumsberechnungen bei Drehellipsoiden, -hyperboloiden und Drehparaboloiden und vor allem seine Quadratur des Parabelsegmentes, die erste Inhaltsbestimmung bei krummlinig, aber nicht kreisförmig begrenzten Flächenstücken. Seine dabei entwickelte "Exhaustionsmethode" ist ja bekanntlich auch die wesentliche Grundidee des Riemann-Integrals.

Das wesentlichste erhaltene antike Werk über Kegelschnitte, ein Werk aus 8 Büchern (Rollen) bestehend, verfaßte aber APOLLONIUS VON PERGA (262-190 v.Ch.), die sogenannten "Konika stoichea" (stoichea...Elemente; konika...Kegelschnitte (von conos...Tannenzapfen; (engl.: cone))). Hier findet sich eine systematische Behandlung der Kegelschnitte und zahlreicher ihrer räumlichen und planmetrischen Eigenschaften (vgl. § 1). Vor allem aber prägt APOLLONIUS die heute gebräuchlichen Bezeichnungen, worin ein gutes Stück Mathematik und Systematik zum Ausdruck kommt.



Diese Bezeichnungen fußen in einer planimetrischen Systematik, deren Ursprung in den sogenannten "Flächenanlegungen" liegt, die ihrerseits pythagoreischen Ursprungs sind.

"Flächenanlegungen" (d.s. im wesentlichen geometrische Verwandlungen von Rechtecken in flächengleiche Quadrate) traten nämlich schon bei EUKLID bei der Lösung quadratischer Gleichungen auf. So führte schon bei EUKLID die Beschäftigung mit sogenannten "ähnlichen Zahlen" auf das Problem der "mittleren Proportionale": Zwischen zwei gegebene Zahlen (Strecken)  $a, b$  ist eine Zahl (Strecke)  $x$  "einzuschieben" mit  $a:x = x:b$ .

Dies führt ersichtlich auf  $x^2 = ab$  und also - da die Griechen vor allem "geometrisch arbeiteten" - auf die Verwandlung eines Rechteckes in ein flächengleiches Quadrat. Allgemein brachten die Griechen ja üblicherweise quadratische Gleichungen auf eine der Formen  $x(x+a) = F$ ,  $x(x-a) = F$  oder  $x(y-x) = F$ , die sie dann geometrisch dadurch lösen konnten, daß sie geeignete Rechtecke in flächengleiche Quadrate verwandelten und umgekehrt. (Siehe den Anhang).

Die dabei verwendete Methode ist der Höhensatz, bekanntlich äquivalent zum Satz des Pythagoras und der Satz von Thales (Fig. 6).

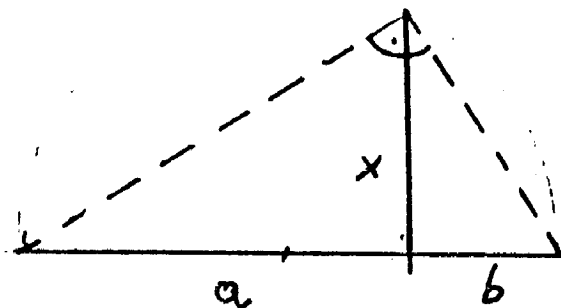


Fig. 6,  $x^2 = a \cdot b$

Und eben dies liegt nun auch der Konstruktion, bzw. der (planimetrischen) Definition der Kegelschnitte zugrunde. Es handelt sich dabei um eine durchaus auch für den Mathematikunterricht interessante Methode!

### Die Parabel

Beginnen wir mit der Parabel: Fig. 7 zeigt, wie das Rechteck  $(2p;x)$  mittels Thaleskreis und Höhensatz in ein flächengleiches Quadrat  $(y^2)$  verwandelt wird.

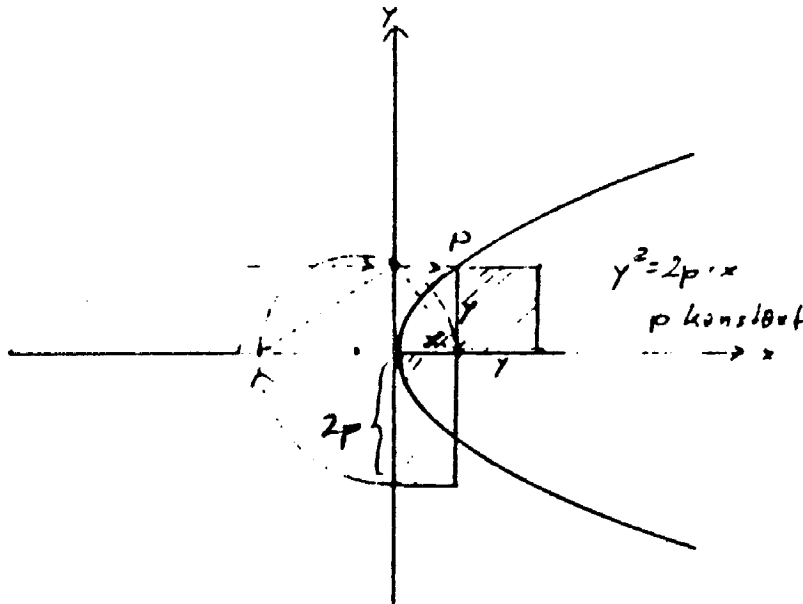


Fig. 7

Die Bezeichnungen sind dabei so gewählt, daß der Zusammenhang zur Parabel deutlich wird. Betrachtet man nämlich die eine Seite  $(2p)$  des Rechteckes als fest, die andere  $(x)$  aber variabel, so liegen die Punkte P also offenbar genau auf der Parabel  $y^2 = 2px$ . Die Parabel kann also durch diese Eigenschaft definiert und konstruiert werden.

Und eben daher kommt auch das Wort "Parabel":  $\pi\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta'$  (aequalitas) bedeutet so viel wie "Anlegung" (des flächengleichen Quadrates  $(y^2)$ ) an das gegebene Rechteck  $(2p \cdot x)$ . (para... entlang, bei; ballein... werfen, legen). Aus einer ganz analogen Sichtweise kann man nun auch Ellipsen und Hyperbeln erklären, was nicht nur die geometrische "Verwandtschaft" mit der Parabel, sondern auch ihre Bezeichnungen erklärt (APOLLONIUS um 200 v. Ch.):

Die Ellipse

Für die Konstruktion bzw. Definition der Ellipse mit den Achsen  $a$  und  $b$  führen wir (um ein mit der Parabel vergleichbares Verfahren zu erhalten) zunächst den Begriff des Parameters  $p$  dadurch ein, daß  $b^2 = a \cdot p$  sein soll (Fig. 8a und 8b; vgl. das Konstruktionsprinzip der Flächenanlegung von oben).

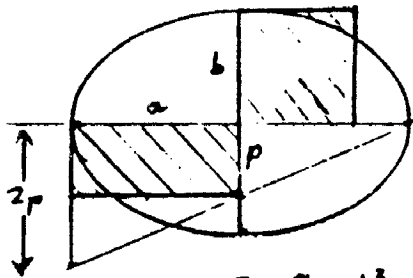


Fig. 8a:  $b^2 = ap$   
Parameter  $p$  einer Ellipse  
(Fein Kreis:  $p = a \cdot r$ )

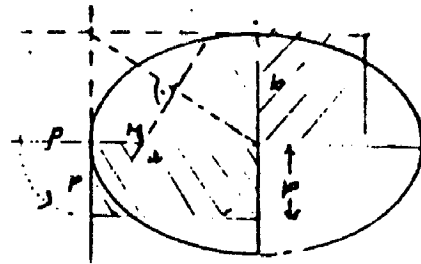


Fig. 8b. Konstruktion von  $p$  mittels 'Thaleskreis'

Die Kurvenpunkte der Ellipse entstehen nun (wie bei der Parabel) wieder durch Verwandlung von Rechtecken  $(x; z_x)$  in flächengleiche Quadrate  $(y^2)$ , wobei  $O$  auf der strichlierten Diagonale des Rechteckes  $(2p; 2a)$  wandert. (Für  $x = a$  ist offenbar  $z_x = z_a = p = \frac{b^2}{a}$ ).

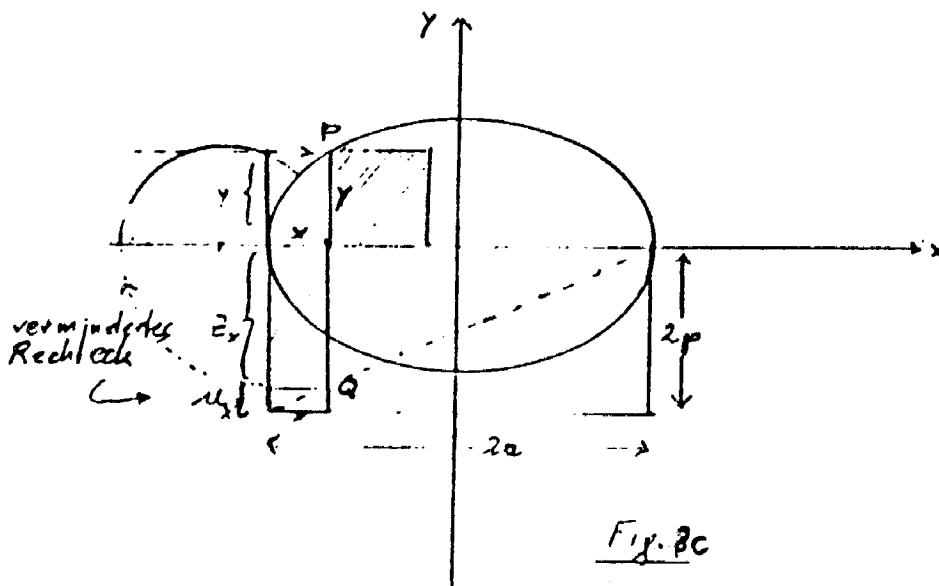


Fig. 8c

Offenbar gilt ja hier:  $y^2 = x \cdot z_x = x(2p - u_x) = 2px - u_x \cdot x$

und da aus Ähnlichkeitsgründen  $u_x : x = 2p : 2a = p : a$  gilt, folgt

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung der Parabel, so sieht man zweierlei:

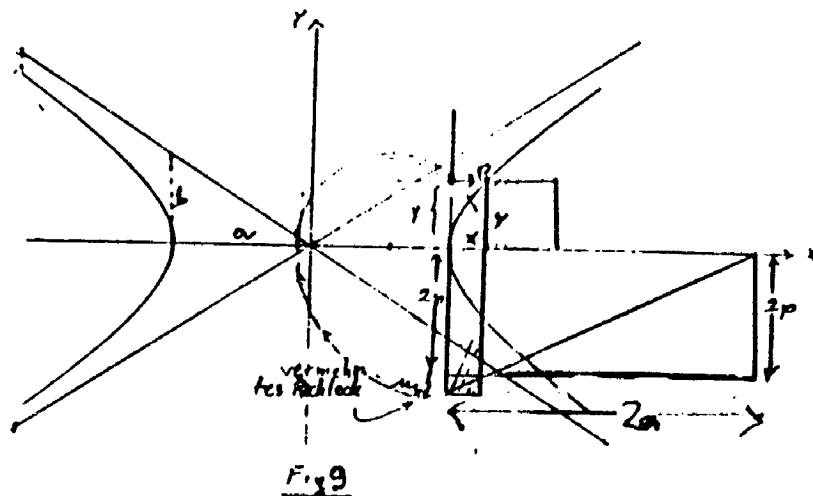
(1)  $y^2$  entsteht durch Verwandlung des um das Rechteck  $(x; u_x)$  verminderten Rechtecks  $(x; 2p)$  in ein Quadrat ( $y^2$ ). Nun heißt  $\acute{\epsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\pi\epsilon\acute{\iota}\nu$  "weglassen" und  $\acute{\epsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\psi\acute{\iota}\varsigma$  die "Auslassung", "Wegnahme", wovon nach APOLLONIUS die Bezeichnung "Ellipse" kommt

(2) Überzeugt man sich - aus heutiger Sicht - leicht, daß die Punkte tatsächlich auf einer Ellipse liegen (und daß - umgekehrt - die Ellipse geometrisch so erzeugt werden kann): Gilt doch offenbar  $a^2y^2 + b^2(x - a)^2 = a^2b^2$ , welche Gleichung unsere Ellipse eben in kartesischen Koordinaten mit Ursprung im linken Scheitelpunkt darstellt.

Bemerkung: Umgekehrt kann man von der (kartesischen) Gleichung ausgehend die hier in Rede stehende Eigenschaft der Ellipsen "beweisen". Dabei sind ersichtlich keine die Schulmathematik überschreitenden Kenntnisse nötig.

Die Hyperbel

Analoges gilt für die Hyperbel (Fig. 9). Wieder vergleichen wir mit der Parabel und sehen, daß nun das Quadrat ( $y^2$ ) durch Verwandlung des um das Rechteck ( $u_x; x$ ) vermehrten Rechteckes ( $x; 2p$ ) entsteht. 'Υπερβάλλειν heißt aber nun wörtlich "darüber hinauswerfen", "übertreffen", und ὑπερβολή der "Überschuß", die "Vermehrung", wovon APOLLONIUS die Bezeichnung "Hyperbel" ableitet.



Setzt man wieder mit den Griechen  $p = \frac{b^2}{a}$  ("Parameter" der Hyperbel), d.h.:  $b^2 = p a$ , so erhält man ganz analog zu oben:  $y^2 = x(2p + u_x)$  und wegen  $u_x : x = p : a$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x = 2px + \frac{b^2}{a^2}x,$$

woraus auch die wieder in kartesischen Koordinaten geschriebene Gleichung  $a^2 y^2 - b^2 (x-a)^2 = a^2 b^2$  folgt.

Merke: Bei Ellipse und Hyperbel ist der "Parameter" p die Länge derjenigen Strecke, welche mit der Strecke a (1. Hauptachsenlänge) ein zu  $b^2$  (2. Hauptachse) flächengleiches Rechteck formt! Beim Kreis ist somit  $p = r$ ).

Zusammenfassung:

Wir haben hier einen auf APOLLONIUS zurückgehenden Gesichtspunkt, der eine einheitliche Behandlung (Konstruktion, Definition) der Kegelschnitte erlaubt, der ferner neue Einsichten in deren "Verwandtschaft" und der schließlich die Begründung ihrer Axen gewährt.

Eine moderne Form dessen erkennt man in den sogenannten

"gemeinsamen Scheitelgleichungen" der Kegelschnitte:

$y^2 = 2px + \epsilon^2 - 1)x^2$ , wobei  $p$  der "Parameter" und  $\epsilon$  die sog.

"numerische Exzentrizität" ist, das ist das (bei den einzelnen Kegelschnitten konstante(!)) Verhältnis der Distanzen eines Punktes  $P$  vom Brennpunkt bzw. von der entsprechenden Leitlinie des Kegelschnittes (Fig. 10; vgl. §1/II).

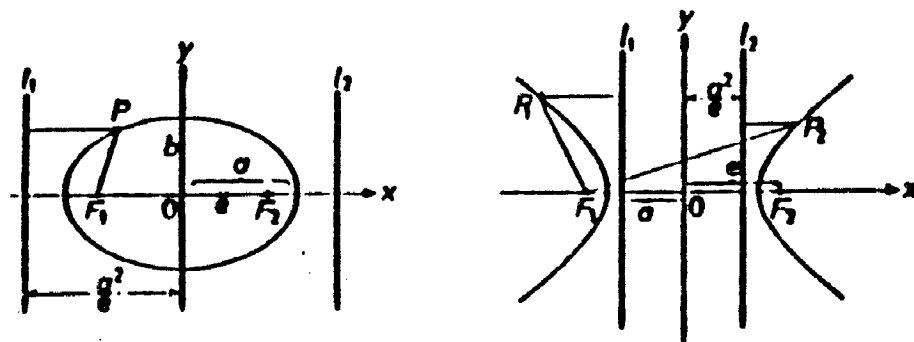
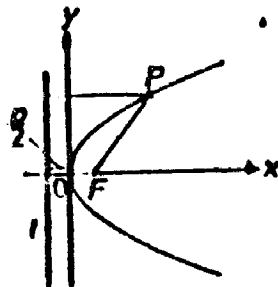


Fig. 10:  $l_{1,2}: x = \pm \frac{a^2}{e};$

$l_{1,2}: x = \pm \frac{a^2}{e};$



$l: x = -\frac{p}{2}.$

§ 3. Eine Bemerkung über Koordinaten und Koordinatensysteme,  
Ursprung und kulturhistorische Auswirkungen

Wir haben oben - wie im Mathematikunterricht üblich - mehrfach "kartesische Koordinaten" zur Beschreibung von Kegelschnitten verwendet, die Grundlage der auf P. FERMAT (1601-1655) und R. DESCARTES (1596-1650) zurückgehenden "analytischen Geometrie". Die Koordinatisierung von Punkten mit Hilfe eines "kartesischen Koordinatensystems" erlaubt einerseits die Übersetzung geometrischer Aufgaben in das Rechnen mit Gleichungen, andererseits die geometrische Veranschaulichung von Gleichungen und Funktionen (ein Begriff übrigens, der ohne Koordinatensystem in dieser Form wohl kaum entstanden wäre). Diese für die Mathematik so überaus bedeutsame "Koordinatenmethode" ist also im 17. Jahrhundert entstanden und ist alsobald in hohe Blüte gekommen, und dies übrigens historisch erstmalig bei und für Probleme mit Kegelschnitten (siehe unten).

Gleichwohl geht die "Uridee" der Verwendung von Koordinaten - wenn auch nicht das Koordinatensystem selbst - ebenfalls auf die Antike zurück, wo sie übrigens auch vor allem bei der Beschäftigung mit Kegelschnitten zum Tragen kommt.

APOLLONIUS - und vorher ARCHIMEDES - haben nämlich gewisse "Zahlgrößen" (Koordinaten) benützt, um die Lage von Punkten auf Kegelschnitten zu beschreiben, die sich allerdings nicht auf ein Koordinatensystem Descartes'scher Prägung beziehen. Durch Variieren dieser "Koordinaten" ergeben sich dann aber doch auch Gleichungen, sog. "Symptome" dieser Kegelschnitte. Die folgenden Skizzen Fig. 11a-d) gehen auf APOLLONIUS zurück und stehen in engem Zusammenhang mit den in § 2 erläuterten Charakterisierungen von Kegelschnitten. Als "Koordinaten" treten dabei die Streckenlängen  $x$ ,  $x_1$  und  $y$  auf. ( $\alpha > 0$ , in der Antike kannte man keine negativen Zahlen!):



Kreis

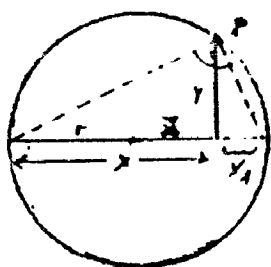


Fig 11 a

$$y^2 = xx_1 \text{ (Höhensatz)}$$

$$y^2 : xx_1 = 1$$

Ellipse

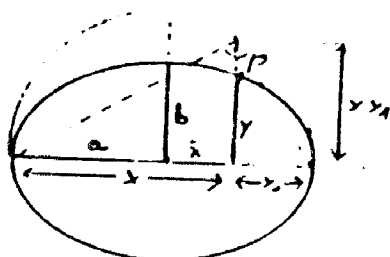


Fig 11 b

$$y^2 : xx_1 = a \text{ (konst. } a \neq 1)$$

Hyperbel

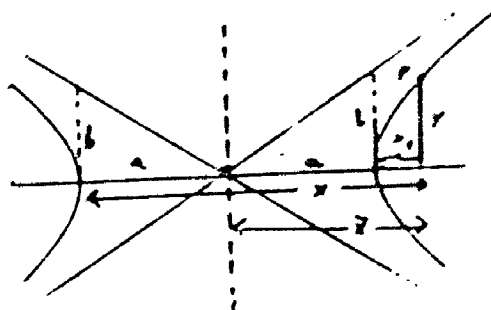


Fig 11 c

$$y^2 : xx_1 = a \text{ (} a \neq 1)$$

In kartesischen (Mittelpunkts)koordinaten  $\bar{x}$  und  $y$  geschrieben:

$$y^2 = (r+\bar{x})(r-\bar{x})$$

$$\bar{x}^2 + y^2 = r^2$$

Wegen  $y^2 = \frac{b^2}{x^2} xx_1$  ist

$$a = \frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} \text{ und somit}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a+\bar{x})(a-\bar{x})$$

$$a^2 y^2 + b^2 \bar{x}^2 = a^2 b^2$$

$$y^2 = a(\bar{x}+a)(\bar{x}-a) \text{ mit}$$

$$b^2 \bar{x}^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Für die Parabel gilt schließlich das gleiche "Symptom" (Gleichung):

$$y^2 : xx_1 = a$$

wobei nun allerdings

$x_1 = \beta$  fest ist.

Mit anderen Worten:

$y^2 = (\alpha\beta)x$ . (Mit  $\beta = 1$  und  $\alpha = 2p$  gilt wieder:  $y^2 = 2px$ ).

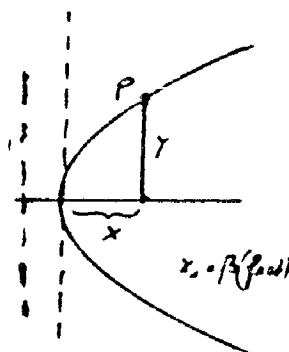


Fig 11 d

### Über die "Auswirkungen" der Koordinatenmethode:

Wenn also die Verwendung von Koordinaten zur Lagebeschreibung von Punkten in gewisser Weise tatsächlich auf die Antike zurückgehen, so gelangen sie als solche allerdings erst im 17. Jahrhundert zu wesentlicher Bedeutung, als sie - wie gesagt - René DESCARTES nach "Vorarbeiten" von VIETA und FERMAT für seine "Algebraisierung der Geometrie" systematisch einsetzt.

Durch die "Identifizierung" von Punkten P der Ebene mit Zahlenpaaren (x/y) übersetzt er geometrische Probleme und Begriffe (Kurven, Gerade, etc.) in arithmetische (Gleichungen, regelhaft-kalkülmäßiger "Umgang" mit reellen Zahlen). DESCARTES erhebt diese Idee schließlich zur generellen Methode, wodurch die Geometrie, die alte "Königin" der Mathematik, dem kalkülhaft-algebraischen Rechnen untergeordnet wird. In seiner "Geometrie", [DE] schreibt er:

"Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, daß es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser gerader Linien (i.e. Koordinaten (Bem.v. Verfasser dieses)) bedarf, um diese Probleme zu lösen."

In Anlehnung und Generalisierung dieser "Analytisierung" der Geometrie erfolgt nun - und das muß betont werden - die Entwicklung der Philosophie R. DESCARTES' (und später CH. WOLFFS u.a.) zu dem, was letztlich unter dem Begriff "Rationalismus" subsummiert wird.

Sinmal mehr ist die Übertragung und Verallgemeinerung einer mathematischen Idee eine Leitlinie für die Entstehung umfassender philosophischer Systeme. Vgl. z.B. auch PLATO, R. BACON, N. CUSANUS, B. PASCAL, B. SPINOZA, I. KANT, B. BULZANO, L. WITTEGENSTEIN, um neben DESCARTES nur einige zu nennen, wo Mathematik als Paradigma, ja als Propädeutik philosophischer Begriffsbildungen und Systeme auftritt).

Die bei DESCARTES typische Unterwerfung der geometrischen Anschaulichkeit unter den "Supremat" des analytisch-rechnerisch argumentierenden Kalküles, wo (vorgeblich) absolute Gewisheit durch die (analytische) Methode herrscht, entspricht schließlich

allgemeiner die Überwindung aller "bloß" sinnlich-anschaulichen Bilder und Vorstellungen unter logisch folgerichtiges kalkülhaftes Denken nach festen Regeln. Dadurch ergibt sich der Primat der Methode, die auf der Selbstgewißheit des Denkens aufbaut ("cogito, ergo sum").

So wie sich die Vielfalt der Geometrie der analytischen Methode unterordnet und dort ihren Platz findet, soll schließlich alles Wissen in der Einheit der Methode einer einzigen Wissenschaft, der "mathesis universalis" fundiert werden.

Aus der analytischen Geometrie ist ja wohl auch die Präferenz entstanden, die "rechnerisch" kalkülhaft algebraisierten Beweisen oft vor anschaulich intuitiven Argumenten zugestanden wird (und die schließlich im mathematischen Formalismus dieses Jahrhunderts "gipfelt"). In der Mathematik wird ja letztlich bis heute diskutiert, was der anschauliche Leitfaden der Gewißheit ist, und ob ein solcher überhaupt notwendig sei. <sup>3)</sup>

Die "Unterdrückung" der anschaulich sinnlichen Grundlage des Denkens (im allgemeinen) ist dann ja auch eines der wesentlichen Kennzeichen der Rationalismus, der in gewisser Form trotz mannigfaltiger Kritik (z.B. bei ADORNO u.a., aber auch speziell bei der Populärphilosophie der letzten beiden Jahrzehnte) bis heute wirkt. (Gegenbewegungen: Wissenschaftsfeindlichkeit, "Nes Age" u.a.m.)

Hier ist nun nicht der Platz über Wechselwirkungen zwischen Mathematik und Philosophie weiter zu diskutieren, schließen wir aber unsere Gedankenkette durch den Hinweis, daß in der Beschäftigung mit der Geometrie der Kegelschnitte (jedenfalls auch) eine der historischen Wurzeln derartiger Entwicklungen liegt. Ist es doch Tatsache, daß DESCARTES seine analytische Geometrie und analytische Methode an klassischen Kegelschnittproblemen (PAPPUS'sche Sätze und Probleme von PAPPUS und APPOLONIUS entwickelt und (erstmalig) erprobt hat. ([DE],[JA],u.a.).

---

L. WITTGENSTEIN sagt z.B.: "Die Frage, welche Rolle die Anschauung für die Mathematik spielt, muß so beantwortet werden, daß hier eben die Sprache die notwendige Anschauung liefert." (aus dem Ged.zit. - Verf. dieses).

Daß sich nun im heutigen Unterricht die analytische Geometrie vor allem "vektoriell" und an linearen Problemen darstellt, mag methodisch-didaktische Gründe haben; ohne die Erwähnung der vorstehenden Aspekte der nicht-linearen- und der Koordinatengeometrie läge aber eine (meines Erachtens traurige) Reduktion vor!

Abschließend sei eine Passage aus dem HAK-Buch [BGKR] zitiert, mit der ich meinte, das mir hier zu § 3 Wesentliche schülergerecht und in aller Kürze zu vermitteln.

## 5. Koordinatengeometrie

### Einleitung

Grundidee der Koordinatengeometrie ist es, Punkten der Ebene (bzw. des Raumes) mit Hilfe eines Koordinatensystems Paare  $(x/y)$  reeller Zahlen zuzuordnen und umgekehrt. Gerade und krumme Linien (z. B. Kreise, Hyperbeln, Ellipsen, Parabeln) bestehen aus Mengen von Punkten  $(x/y)$ , die in einer jeweils ganz bestimmten Beziehung zueinander stehen, deren rechnerischer Ausdruck eine Gleichung in den Variablen  $x$  und  $y$  ist. Solcherart können geometrische Probleme arithmetisch (d. h. rechnerisch mit Hilfe von Zahlen und Gleichungen) behandelt und gelöst werden. Die Sprache der Geometrie wird gleichsam in die Sprache der Arithmetik und Algebra übersetzt (und umgekehrt).



Pierre de Fermat



René Descartes

Diese Idee (sowie der systematische Gebrauch eines Koordinatensystems) geht auf Pierre de Fermat (1601 – 1665) zurück, vor allem aber auf René Descartes (1596 – 1650), der diese Art, Geometrie zu betreiben, auch gleich zu einer ersten, großen Perfektion brachte. (Diese Erfindung und Entwicklung ist eine der größten mathematischen Leistungen der Barockzeit.)

Die auf den ersten Blick so „harmlose“ Methode der Koordinatengeometrie ordnete sozusagen die Geometrie der Algebra und der Arithmetik unter; Geometrie war plötzlich nicht mehr — wie seit den antiken Griechen — eine selbständige „Königin“ der Mathematik, sondern eine untergeordnete Anwendung der Arithmetik und Algebra. Das logisch-regelhafte Umgehen mit Zahlen, den Rechenoperationen und mit Gleichungen war nun primär, die Geometrie — und später alles andere auch! — war Anwendung des logischen und rationalen Denkens: Unser bis heute wirksames rationales Denken war geboren, einem rationalen Weltbild der Natur (und später des Menschen selbst) waren die Tore geöffnet. Kalkülhaft rationale Anwendung der Mathematik auf Technik, Natur und Wirtschaft waren die Folge und wirken bis heute. René Descartes, der auch Philosoph war, gilt als Begründer des sogenannten „Rationalismus“ („cogito, ergo sum“ = ich denke, also bin ich).

So wird in der Person René Descartes' und in seinem wissenschaftlichen Werk deutlich, welche Wechselwirkungen zwischen Mathematik, Philosophie und allgemeinem Weltbild bestehen. So wie hier die analytische Geometrie letztlich zu ganz neuen und vielleicht sogar „revolutionären“ Änderungen des allgemeinen Denkens und Weltbildes geführt hat, wiederholen sich ähnliche Beziehungen und Auswirkungen der Mathematik in der Kulturgeschichte vielfach! Die Mathematik ist ein ganz bedeutender Teil unserer Kultur- und Geistesgeschichte! (Das

### A n h a n g

#### Lösung quadratischer Gleichungen in der Antike durch Flächenverwandlungen (Rechtecksanlegungen):

Die Lösung quadratischer Gleichungen vom Typ

(1)  $x(a-x) = F$

(2)  $x(x-a) = F$

(3)  $x(x+a) = F$

kann bei gegebenem  $a$  und  $F$  mittels Flächenverwandlungen von Rechtecken ("Rechtecksanlegungen") erfolgen. Wie meist in der Antike wurde dabei "algebraisch" gedacht, aber geometrisch argumentiert:

In Fall (1) lautet das Problem ja wie folgt: gegeben ist das Produkt  $u \cdot v = F$  zweier Zahlen (Strecken) und die Summe  $u+v = a$ . Konstruiere  $u = x$  und  $v = a-x$ !).

#### Lösung:

1. Schritt: Konstruiere ein Rechteck mit den Seiten  $1$  und  $F$  und verwandle es in ein flächengleiches Quadrat (mit der Seite  $z$ ).  
(Beispiel:  $F = u \cdot v = 4,8$ ;  $a = u+v = 5,2$ )

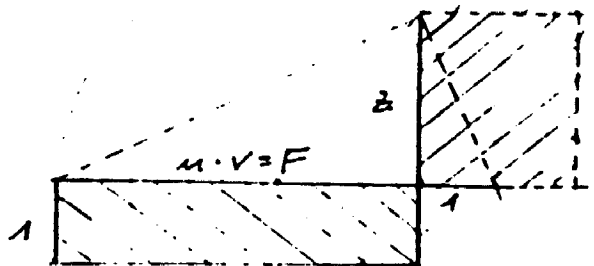


Fig. 11:  $F = u \cdot v = z^2$

2. Schritt: Konstruktion des Rechteckes mit den Seiten  $u$  und  $v$ :

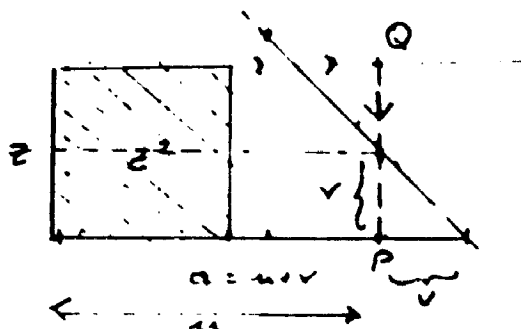


Fig. 12

Ausgehend vom Quadrat ( $z^2$ ) und der Strecke mit der Länge  $u+v = a$  konstruieren wir ein flächengleiches Rechteck mit den gesuchten Seiten  $u$  und  $v$  mit Hilfe des Punktes  $Q$  so, wie Fig. 12 es zeigt - und das bringt die Lösung!

Die anderen beiden Fälle (zu konstruieren ist nun  $u$  und  $v$  aus der Differenz  $a = u-v$  (bzw.  $v-u$ ) und dem Produkt  $F = u \cdot v$ ) verlaufen analog.

Derartige Konstruktionen finden sich bereits in EUKLIDS "Elementen" (um 325 v. Ch.); siehe z.B. [vW].

Literatur

- [BGKR] Brunner, Gleißner, Kunesch, Reichel: Mathematik für Handelsakademien, Band 2; Österr. Gewerbeverlag, Wien, 1988.
- [CI] Cigler, J.: Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie; Manz Verlag, Wien 1976.
- [DE] Descartes, R.: Geometrie; dt. herausgegeben v. L. Schlesinger; Darmstadt 1969.
- [JA] Jaspers, K.: Descartes und die Philosophie; Berlin 1937.
- [KN] Kaiser, H. und Nöbauer, W.: Geschichte der Mathematik; Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1984.
- [KI] Kirsch, A.: Anschauliche Begründung einiger Verfahren der numerischen Mathematik aus der Geometrie der Parabel; Math. Schriften Kassel, Feb. 1988.
- [KR] Kropp, G.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik; BI, Mannheim 1969.
- [MI] Mitsch, H.: Lineare Algebra und analytische Geometrie; Prugg-Verlag, Eisenstadt 1979.
- [RO] Reichel, H.C. und Oeser, E.: Mathematik und Philosophie, 2500 Jahre Wechselwirkungen; Lehrerfortbildungsseminar Mariazell und Raach, 1987, 1988.
- [SCH] Schweiger, F.: Analytische Geometrie oder sind die Kegelschnitte noch zu retten? Math. im Unterricht, Mitteilungen der Arbeitsgemeinschaft der Mathematikprofessoren des Landes Salzburg, Salzburg 1983.
- [VO] Volkert, K.: Geschichte der Analysis; BI, Mannheim 1987.
- [vW] v.d.Waerden, B.L.: Erwachende Wissenschaft; Birkhäuser Verlag 1966.
- [WA] Walther, R.: Lineare Algebra und Analytische Geometrie; Vieweg, Braunschweig 1985.
- [ZE] Zeuthen, K.: Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum; G. Olms Verlag, Hildesheim 1965.